Б.А. Лобасенко, Р.В. Котляров

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕМБРАННЫХ УСТАНОВОК ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ПЕРЕРАБОТКИ МОЛОЧНОЙ СЫВОРОТКИ

На основе кибернетического подхода осуществлено математическое моделирование мембранного модуля с отводом диффузионного слоя. Разработаны математические модели резервуаров для исходного и конечного растворов. Их совместное решение позволило получить математическую модель работы установки периодического действия.

Моделирование, кибернетический подход, черный ящик, мембранная установка, мембранный аппарат, мембранный модуль, диффузионный слой.

Мембранная установка периодического действия включает следующие компоненты: мембранный аппарат, состоящий из нескольких мембранных модулей; резервуар с исходным раствором; резервуар для сбора концентрата.

Моделирование мембранной установки осуществляется в несколько этапов, каждый из которых заключается в разработке математических моделей ее компонентов, а затем их объединении определенным образом.

Этап I. *Моделирование мембранного модуля.* В качестве объекта рассматривается мембранный модуль с отводом диффузионного слоя [1], моделирование которого на основе кибернетического подхода включает несколько шагов:

1. Анализ модуля с позиций кибернетического подхода и выявление основных входных и выходных переменных. На данном этапе, исходя из описания мембранного модуля в соответствии с принципом «черного ящика», можно выделить основные входные и выходные параметры объекта моделирования, а также определить каналы передачи входных сигналов системы. Входным воздействием является концентрация задерживаемых веществ в исходном растворе C(t), %масс. К выходным параметрам относятся: содержание растворенных веществ в концентрате, отводимом из кожуха $C_{кож}(t)$, %масс. и конуса $C_{кон}(t)$, %масс.; концентрация растворенных веществ в основном потоке $C_{оп}(t)$, %масс.; удельная производительность по фильтрату $G_{ф}(t)$, $м^3/м^2 \cdot с$.

Основные каналы типа «вход – выход»:

- «исходная концентрация $C_{вх}(t)$ – концентрация раствора из кожуха $C_{вых\ кож}(t)$» ($W_{кожС}(S)$);
- «исходная концентрация $C_{вх}(t)$ – концентрация раствора из конуса $C_{вых\ кон}(t)$» ($W_{конС}(S)$);
- «исходная концентрация $C_{вх}(t)$ – концентрация основного потока $C_{вых\ оп}(t)$» ($W_{опС}(S)$);
- «исходная концентрация $C_{вх}(t)$ – удельная производительность $G_{ф}(t)$» ($W_{фС}(S)$).

На систему также оказывают влияние основные технологические параметры процесса: рабочее давление, температура концентрируемого раствора и гидродинамическая обстановка в канале модуля (скорость движения среды). Передаточные свойства каждого канала системы определяются соответствующей передаточной функцией, обозначения которой имеют двойной индекс: первый отражает наименование выхода системы, второй – входной технологический параметр. Так, для температуры передаточные функции по выходам обозначены: отвод из кожуха $W_{кожТ}(S)$, отвод из конуса $W_{конТ}(S)$, отвод основного потока $W_{опТ}(S)$, отвод фильтрата $W_{фТ}(S)$. Аналогично передаточные функции по каналам «давление – выходы» и «скорость течения – выходы» можно записать: отвод из кожуха по давлению $W_{кожР}(S)$ и скорости потока $W_{кожV}(S)$, отвод из конуса по давлению $W_{конР}(S)$ и скорости потока $W_{конV}(S)$, отвод основного потока по давлению $W_{опР}(S)$ и скорости потока $W_{опV}(S)$, отвод фильтрата по давлению $W_{фР}(S)$ и скорости потока $W_{фV}(S)$.

2. Определение диапазонов изменения входных воздействий. На основе экспериментальных и литературных данных установлены следующие диапазоны:

- концентрация исходного раствора молочной (творожной) сыворотки 3,7÷6,8 % масс.;
- температура сыворотки 20÷60 °С. Нижний предел диапазона обусловлен средней температурой производственных помещений, верхний – температурой денатурации белков молочной сыворотки;
- давление процесса ультрафильтрации 0,1÷0,2 МПа. Нижний предел обусловлен тем, что для осуществления процесса концентрирования необходима разность давлений – внутри и снаружи (атмосферного) мембраны – как основная движущая сила процесса. Верхний предел выбран в соответствии с максимальным рабочим давлением для данного типа мембран (керамическая мембрана третьего поколения из оксида алюминия). Обычно процесс ультрафильтрации проводится при давлении 0,15 МПа;
- режим течения жидкости внутри мембраны определяется критерием Рейнольдса 0÷2300, или при внутреннем диаметре мембраны 0,004 мм скорость течения составит 0÷0,84 м/с. При таких значениях критерия Рейнольдса и скорости течения обеспечивается ламинарный режим движения среды, что снижает размывание диффузионного слоя. Рекомендуется выбрать средний диапазон значений скоростей 0,4÷0,5 м/с.

3. Выбор вида и величины входных воздействий. При экспериментальных и теоретических исследованиях объектов и их элементов используют ряд стандартных сигналов, называемых типовыми воздействиями. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и

легко воспроизводятся при испытании систем. Использование типовых («эталонных») воздействий позволяет унифицировать расчеты различных систем и облегчает сравнение передаточных свойств систем [2]. На процесс концентрирования оказывает значительное влияние накопление частиц растворенных веществ на поверхности мембраны. Анализ показывает, что этот процесс является не мгновенным. Поэтому из типовых воздействий целесообразно выбрать ступенчатое, при котором величина возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянной. Такому воздействию соответствует функция (1).

$$x_C(t) = \begin{cases} 0, при (t < 0), \\ a_0, при (t \geq 0). \end{cases} \quad (1)$$

Значение величины ступенчатого воздействия a_0 необходимо выбрать, учитывая диапазон изменения входных сигналов. Исходя из вышесказанного, имеем следующие функции, описывающие входные воздействия (2÷5).

$$C_C(t) = \begin{cases} 0\% масс., при (t < 0), \\ 4\% масс., при (t \geq 0). \end{cases} \quad (2)$$

$$T_C(t) = \begin{cases} 20^0 C, при (t < 0), \\ 30^0 C, при (t \geq 0). \end{cases} \quad (3)$$

$$P_C(t) = \begin{cases} 0{,}15 МПа, при (t < 0), \\ 0{,}17 МПа, при (t \geq 0). \end{cases} \quad (4)$$

$$V_C(t) = \begin{cases} 0{,}4 м/с, при (t < 0), \\ 0{,}5 м/с, при (t \geq 0). \end{cases} \quad (5)$$

Реакция системы на ступенчатое воздействие называется переходной функцией. Наносить воздействия необходимо, когда система находится в статическом режиме, при котором выходная величина не изменяется во времени. Очевидно, что статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Для процесса мембранного концентрирования теоретически существуют два способа выхода переменных в статический режим: при отсутствии диффузионного слоя на мембране и при его наличии. Однако отсутствие слоя подразумевает использование исходной среды без содержания растворенных веществ (чистый растворитель, например, вода), что не имеет место на практике.

Образование диффузионного слоя и его отрыв от поверхности мембраны происходят циклически в течение некоторого времени. Поэтому в данном случае для определения реакции системы на то или иное воздействие (T, P, V) необходимо совместное нанесение соответствующего возмущения с возмущением по каналу «концентрация исходного раствора – выход». Далее, исходя из принципа суперпозиции, аналитически возможно определить реакцию системы на чистое возмущение.

4. Структурная идентификация объекта моделирования, которая состоит в выборе структуры модели по результатам изучения имеющихся априорных сведений об объекте и выборе критерия близости (подобия) модели и объекта.

Изменение концентрации растворенных веществ в диффузионном слое носит колебательный характер, объясняющийся периодичностью накопления белкового слоя определенной толщины и его удаления потоком среды. Поэтому для описания процесса выбрано колебательное звено, переходный процесс которого описывается функцией (6).

$$h(t) = k \cdot (1 - (\cos \omega \cdot t + m \cdot \sin \omega \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}), \quad (6)$$

где α – параметр затухания,

ω – частота собственных колебаний с учетом демпфирования,

$m = \frac{\alpha}{\omega}$ – декремент затухания.

Параметры переходной функции определяются графически. Передаточная функция данного звена имеет вид (7).

$$W(S) = \frac{k}{T^2 \cdot S^2 + T \cdot \xi \cdot S + 1}, \quad (7)$$

где T – постоянная времени объекта,

ξ – коэффициент демпфирования ($1 \geq \xi > 0$).

На стадии структурной идентификации объекта моделирования необходимо учесть, что мембранный модуль не обладает транспортным запаздыванием. При скорости движения концентрируемой среды в мембранном канале модуля 0,4 м/с, что обусловлено необходимостью создания ламинарного режима течения, и длине мембраны 0,175 м значение концентрации задерживаемых веществ в растворе на выходах системы в начальный момент времени практически мгновенно возрастает от нулевого до входного значения, а затем изменяется в соответствии с процессами, происходящими на мембране. Поэтому в выходных сигналах системы присутствует постоянная составляющая, определяемая величиной входного сигнала, соответствующего концентрации исходного раствора. Для описания динамических свойств каналов преобразования сигналов, соответствующих концентрации исходного раствора, в сигналы, соответствующие концентрациям диффузионного слоя и основного потока, выбрана передаточная функция вида (8).

$$W(S) = \frac{k}{T^2 \cdot S^2 + T \cdot \xi \cdot S + 1} + C_0, \quad (8)$$

где $C_0 = 1$ – относительная концентрация растворенных веществ в исходном растворе, %масс./%масс.

Удельная производительность изменяется со временем по экспоненциальному закону, ее изменение во времени наиболее точно описывает передаточная функция (9), которая представляет собой видоизмененную передаточную функцию апериодического звена второго порядка.

$$W_\phi(S) = k_0 - \frac{k}{T_2^2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + 1}, \quad (9)$$

где k – коэффициент усиления объекта;

T_1, T_2 – постоянные времени объекта;

k_0 – удельная производительность по фильтрату

в начальный момент времени.

Выбранные передаточные функции пригодны для описания свойств каналов типа «вход-выход». Для описания динамических характеристик каналов типа «возмущение-выход» необходимо нанесение ступенчатых воздействий сразу по входному каналу и каналу соответствующего возмущения. Передаточная функция канала возмущения определяется аналитически.

Определение передаточных функций по каналам «давление – концентрация на выходах» предполагает одновременное внесение в систему воздействий C(S) и P(S) (рис. 1).

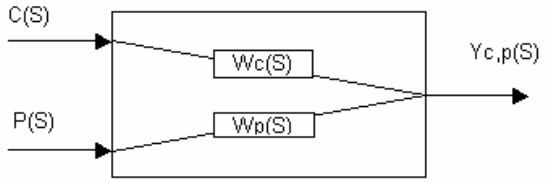

Рис. 1. Определение передаточных функций по каналам «давление –концентрация на выходах»

Выходной сигнал системы $Y_{C,P}(t)$ по каналам «исходная концентрация + давление – кожух, конус, основной поток» также может быть описан функцией (8). В соответствии с рис. 1 можно записать:

$$Y_{C,P}(S) = C(S) \cdot W_C(S) + P(S) \cdot W_P(S), \quad (9)$$

$$W_P(S) = \frac{Y_{C,P}(S) - C(S) \cdot W_C(S)}{P(S)}, \quad (10)$$

где $W_C(S)$ – передаточная функция каждого из каналов системы по исходной концентрации ($W_{кожС}(S)$, $W_{конС}(S)$, $W_{опС}(S)$, $W_{фС}(S)$); $C(S) = \frac{4}{S}$;

$P(S) = \frac{0{,}02}{S}$.

Определение передаточных функций по каналам «скорость течения – концентрация на выходах» предполагает одновременное внесение в систему воздействий C(S) и V(S) (рис. 2).

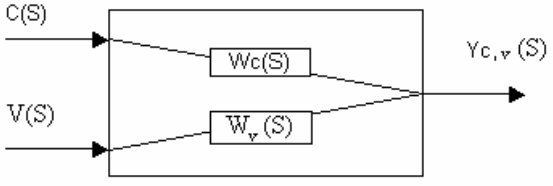

Рис. 2. Определение передаточных функций по каналам «скорость течения – концентрация на выходах»

В соответствии с рис. 2 можно записать:

$$\begin{cases} C_{кож}(S) = C(S) W_{кожС}(S) + P(S) W_{кожР}(S) + V(S) W_{кожV}(S) + T(S) W_{кожТ}(S) \\ C_{кон}(S) = C(S) W_{конС}(S) + P(S) W_{конР}(S) + V(S) W_{конV}(S) + T(S) W_{конТ}(S), \\ C_{оп}(S) = C(S) W_{опС}(S) + P(S) W_{опР}(S) + V(S) W_{опV}(S) + T(S) W_{опТ}(S), \\ G_{ф}(S) = C(S) W_{фС}(S) + P(S) W_{фР}(S) + V(S) W_{фV}(S) + T(S) W_{фТ}(S). \end{cases}$$

$$Y_{C,V}(S) = C(S) \cdot W_C(S) + V(S) \cdot W_V(S), \quad (11)$$

$$W_V(S) = \frac{Y_{C,V}(S) - C(S) \cdot W_C(S)}{V(S)}, \quad (12)$$

где $Y_{C,V}(t)$ – выходной сигнал системы по каналам «исходная концентрация + скорость

течения – кожух, конус, основной поток»;

$W_C(S)$ – передаточная функция каждого из каналов системы по исходной концентрации ($W_{кожС}(S)$, $W_{конС}(S)$, $W_{опС}(S)$, $W_{фС}(S)$);

$$V(S) = \frac{0{,}1}{S}.$$

Определение передаточных функций по каналам «температура – концентрация на выходах» предполагает одновременное внесение в систему воздействий C(S) и T(S) (рис. 3).

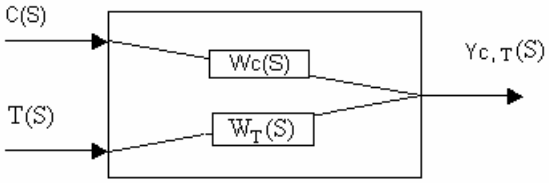

Рис. 3. Определение передаточных функций по каналам «температура – концентрация на выходах»

Аналогично

$$Y_{C,T}(S) = C(S) \cdot W_C(S) + T(S) \cdot W_T(S), \quad (13)$$

$$W_T(S) = \frac{Y_{C,T}(S) - C(S) \cdot W_C(S)}{T(S)}, \quad (14)$$

$$T(S) = \frac{10}{S}.$$

Удельная производительность для каждого из случаев совместного нанесения воздействий на моделируемую систему описывается зависимостями вида (15), откуда аналитически могут быть получены передаточные функции, отражающие динамику изменения проницаемости мембраны по фильтрату при действии отдельных возмущений (16÷18 соответственно).

$$Y_{ф}(S) = \frac{k_0}{S} - \frac{k}{S \cdot (T_2^2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + 1)}, \quad (15)$$

$$W_P(S) = \frac{Y_{ф,P}(S) - C(S) \cdot W_{фС}(S)}{P(S)}, \quad (16)$$

$$W_V(S) = \frac{Y_{ф,V}(S) - C(S) \cdot W_{фС}(S)}{V(S)}, \quad (17)$$

$$W_T(S) = \frac{Y_{ф,T}(S) - C(S) \cdot W_{фС}(S)}{T(S)}. \quad (18)$$

Итоговую модель объекта можно записать в виде системы (19).

(19)

Система (19) определяет состояние выходов объекта моделирования во времени при известной концентрации растворенных веществ в исходном растворе *C(S)*, а также при определенных значениях технологических параметров процесса *P(S)*, *V(S)* и *T(S)*. На основе полученной совокупности передаточных функций, описывающих работу одного мембранного модуля, может быть составлена модель ультрафильтрационной установки для процесса концентрирования молочных продуктов, включающей несколько подобных модулей в любой компоновке.

5. Выбор критерия близости. Критерий близости (функция невязки) должен удовлетворять следующим требованиям: не должен принимать отрицательных значений; минимум критерия близости должен соответствовать решению поставленной задачи; этот минимум должен быть близок к нулю (в идеале равен нулю) при совпадении экспериментальных результатов с результатами, полученными с помощью модели. Наиболее часто используется квадратичная запись критерия (20).

$$Q(t)=(y(t)-y^M(t))^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-y_i^M]^2\rightarrow\min \qquad (20)$$

где y_i – значение выходной переменной объекта в i точке;

y_i^M – значение выходной переменной модели в i точке;

n – размерность массива экспериментальных данных.

6. Определение параметров модели. Данный этап можно трактовать как задачу нахождения экстремума функции многих переменных, имеющих определенные ограничения. Здесь в качестве функции невязки выступает выражение (20), а переменными величинами будут параметры модели (коэффициенты передачи, постоянные времени и т.д.). Для нахождения экстремума функции используют различные методы поиска: сканирования, градиентный, случайный и другие. Таким образом, на данном этапе по экспериментальным данным определяются передаточные функции каналов системы.

7. Проверка адекватности модели. Математическая модель, отвечающая требованиям непротиворечивости, чувствительности и реалистичности, может считаться адекватной и использоваться при прогнозировании описываемых процессов. Проверка адекватности по описанию и прогнозированию реального процесса концентрирования молочной сыворотки показала, что расхождение экспериментальных данных и данных, полученных по модели, не превышает 1,4% по отношению к исходной концентрации в соответствии с квадратичной оценкой. Проверка непротиворечивости модели при варьировании технологических параметров позволяет говорить о достаточной степени адекватности при различных комбинациях значений технологических параметров, соответствующих верхней границе выбранного диапазона. Расхождение экспериментальных и теоретических данных не превышает 0,02% по отношению к исходной концентрации. Анализ чувствительности модели говорит о том, что наиболее сильно на концентрацию растворенных веществ в диффузионном слое влияет давление в канале модуля, а наименьшее влияние оказывает температура исходного раствора. Поэтому следует особенно осторожно варьировать давление и следить за его изменениями в ходе процесса концентрирования.

Этап II. *Моделирование резервуара с исходным раствором.* При моделировании установок периодического действия необходима модель резервуара с концентрируемым раствором, позволяющая определять концентрацию сырья в процессе его переработки.

В основу модели резервуара с исходным раствором положено уравнение материального баланса резервуара (21).

$$C_p\cdot V_p=C_0\cdot V_0-C_0\cdot V_{вх}+C_{оп}\cdot V_{вых}, \qquad (21)$$

где C_p, V_p – концентрация (%масс.) и объем ($м^3$) исходного раствора в резервуаре;

C_0, V_0 – концентрация (%масс.) и объем ($м^3$) исходного раствора в резервуаре в начальный момент времени, %масс.;

$V_{вх}$ – объем раствора, поступающий в аппарат и распределяющийся на концентрат, фильтрат и основной поток, $м^3$;

$V_{вых}$ – объем раствора, поступающий в резервуар из аппарата (основной поток), $м^3$.

$C_{оп}$ – концентрация растворенных веществ в основном потоке, %масс.

Поскольку модель динамическая, запишем равенство (21) в виде (22).

$$C_p\cdot V_p=C_0\cdot V_0-C_0\cdot G_{вх}\cdot t+C_{оп}\cdot G_{вых}\cdot t, \qquad (22)$$

где $G_{вх}$ – расход раствора, поступающий в аппарат, $м^3/с$;

$G_{вых}$ – расход раствора, поступающий в резервуар из аппарата, $м^3/с$.

Преобразуем равенство (22) в (23).

$$C_p\cdot V_p=C_0\cdot V_0-C_0\cdot(G_{кож}+G_{кон}+G_{оп}+G_{ф})\cdot t+C_{оп}\cdot G_{оп}\cdot t, \qquad (23)$$

где $G_{кож}$ – расход концентрата из кожуха, $м^3/с$;

$G_{кон}$ – расход концентрата из конуса, $м^3/с$;

$G_{оп}$ – расход основного потока, $м^3/с$;

$G_{ф}$ – расход фильтрата, $м^3/с$.

Объем исходного раствора в резервуаре меняется в соответствии с равенством (24).

$$V_p=V_0-(G_{кож}+G_{кон}+G_{оп}+G_{ф})\cdot t+G_{оп}\cdot t=V_0-(G_{кож}+G_{кон}+G_{ф})\cdot t \qquad (24)$$

Отсюда получаем зависимость для расчета динамики концентрации растворенных веществ в резервуаре (25).

$$C_p=\frac{C_0\cdot V_0-C_0\cdot(G_{кож}+G_{кон}+G_{оп}+G_{ф})\cdot t+C_{оп}\cdot G_{оп}\cdot t}{V_0-(G_{кож}+G_{кон}+G_{ф})\cdot t} \qquad (25)$$

Ряд параметров ($G_{кож}$, $G_{кон}$, $G_{оп}$) зависимости (25) можно определить как постоянные величины.

Этап III. *Моделирование резервуара для сбора концентрата.* В процессе моделирования необходимо оценивать изменение содержания растворенных веществ в концентрате продукта. Динамика

концентрации растворенных веществ в готовом продукте ($C_п$, %масс.) отражается зависимостью (26).

$$C_п = \frac{\int_0^{t_{пр}} C_к(t)dt}{t_{пр}}, \quad (26)$$

где $C_к(t)$ – среднее содержание растворенных веществ в концентрате из кожуха и конуса (27), %масс.;

$t_{пр}$ – время проведения процесса, с.

$$C_к(t) = \frac{G_{кож}(t) \cdot C_{кож} + G_{кон}(t) \cdot C_{кон}}{G_{кож}(t) + G_{кон}(t)} \quad (27)$$

Зависимости (19, 24, 25, 26) могут быть реализованы в системе, работающей с передаточными функциями, например, MATLAB 6.5 при помощи стандартных средств приложения Simulink.

Список литературы

1. Лобасенко Б.А., Котляров Р.В., Истратова Е.Е. Аппарат для мембранного концентрирования: Патент №2285556. – Опубл. 20.10.06 в Б.И. №29.

2. Антипов С.Г. Конструктивные особенности мембранных аппаратов для обработки жидких пищевых продуктов / С.Г. Антипов, И.Г. Кретов, С.В. Шахов, А.И. Ключников // Хранение и переработка сельхозсырья. – 2001. – №6. – С. 51-52.

ГОУ ВПО «Кемеровский технологический институт
пищевой промышленности»,
650056, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

SUMMARY

B.A.Lobasenko, R.V.Kotlyarov

Modeling of the periodical membrane equipment for processing of the milk whey

The mathematical modeling of the membrane module with diffusion layer removing based on the cybernetic approach is offered. The mathematical models of the initial and final products tanks are worked up. Their joint solvation has allowed to receive mathematical model of work of periodic action apparatus.