

А.Г. Семенов, А.Е. Тимофеев

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ УЛЬТРАФИЛЬТРАЦИОННЫХ УСТАНОВОК ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрены математические модели ультрафильтрационных установок периодического действия с рециркуляцией ретентата и отдельным отводом раствора с выхода мембранного модуля. Проанализированы два варианта организации процесса – с возвратом ретентата в бак с исходным раствором или непосредственно на вход мембранного модуля. Показано, что обе схемы позволяют получить конечный продукт одинаковой концентрации, но установка с возвратом ретентата на вход модуля более подвержена загрязнению мембраны.

Математическая модель, ультрафильтрационная установка, рециркуляция, анализ балансов.

### Введение

В пищевой промышленности широкое применение нашли мембранные технологии переработки жидкого сырья. В частности, для выделения белков из молочной сыворотки используется процесс ультрафильтрации. Ранее [1–3 и др.] были предложены конструкции трубчатых мембранных модулей с отдельным отводом раствора с выхода модуля, что позволяет использовать явление концентрационной поляризации и получать конечный продукт с повышенной концентрацией полезных компонентов.

Схемы ультрафильтрационных установок могут быть как прямоточными, так и с частичной либо полной рециркуляцией раствора. В [3] предложена схема установки для порционной обработки молочной сыворотки с целью получения концентрата сывороточных белков. Расчет и оптимизация подобных установок требуют построения их математических моделей. Одна из таких моделей рассматривалась в [4]. В настоящей работе предлагается более общая модель циркуляционной установки порционной обработки сыворотки.

### Объекты и методика моделирования

Расчетная схема установки, описанной в [3], показана на рис. 1. Ее основой является мембранный аппарат (МА), содержащий  $N$  трубчатых мембран длиной  $L$  и радиусом  $R$ . В аппарат из емкости (бака) I подается исходный раствор высокомолекулярного соединения (ВМС), т.е. сыворотка, содержащая сывороточные белки. В аппарате от раствора отделяется часть жидкости, профильтрованная через мембраны, – пермеат, собираемый в баке III. При рассмотрении модели установки в [4] полагалось, что мембрана полностью задерживает растворенное ВМС. В данной работе предполагается, что мембраны пропускают некоторое количество ВМС, теряемое вместе с пермеатом.

Мембраны оснащены устройствами, позволяющими осуществить разделение раствора на выходе из мембран. Наиболее богатая белком часть раствора (концентрат), включающая приповерхностный диффузионный слой раствора, отделяется в качестве конечного продукта и направляется в бак II. Менее богатая часть раствора (ядро потока, ретентат), занимающая центральную часть канала мембраны, ограниченную цилиндрической контрольной поверх-

ностью с радиусом  $r^*$ , возвращается обратно для повторной переработки.

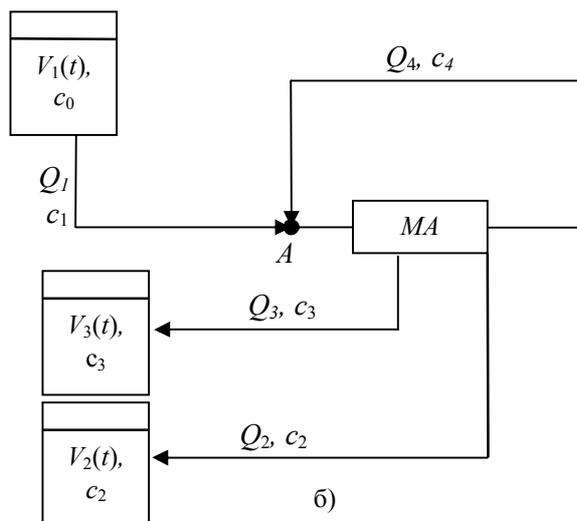
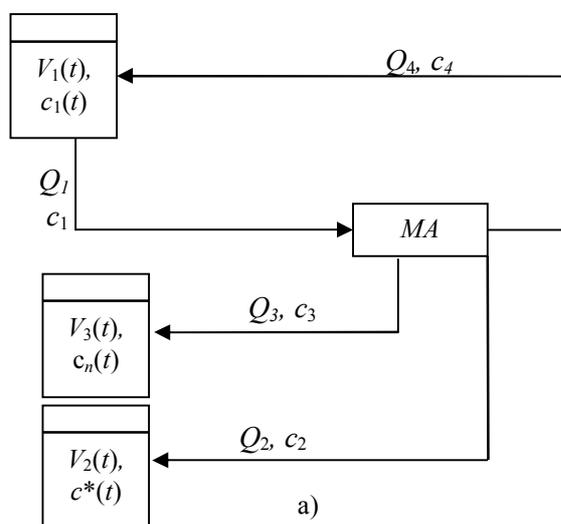


Рис. 1. Схема расчета ультрафильтрационной установки с рециркуляцией ретентата: а) возврат ретентата в бак; б) возврат ретентата на вход аппарата

Установка может работать в одном из двух вариантов. В первом случае (см. рис. 1, а) ретентат воз-

вращается обратно в бак I, где смешивается с исходным раствором (далее такая схема работы установки будет называться просто схемой «а»). Во втором случае (см. рис. 1, б) ретентат возвращается непосредственно на вход аппарата, а из бака I на вход подается лишь такое количество исходного раствора, которое необходимо, чтобы восполнить потерю жидкости в виде пермеата и отведенного концентрата (далее – схема «б»). Необходимо сравнить характеристики обеих схем, чтобы определить их возможные достоинства и недостатки.

Моделирование установки основано на анализе балансов объемов раствора и масс ВМС в ее отдельных элементах. Предполагается, что объемные расходы растворов в трубопроводах, создаваемые входящими в состав установки насосами, неизменны во времени. Время перемещения растворов по трубопроводам не учитывается.

Обозначим через  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  объемные расходы (объемы растворов, переносимые по соответствующему трубопроводу за единицу времени) соответственно раствора, подаваемого из бака I, концентрата, пермеата и ретентата (см. рис. 1), а через  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – концентрации соответствующих растворов. Концентрацию раствора, накапливаемого в баке II, обозначим  $c^*$ , пермеата в баке III – через  $c_n$ , а исходного раствора в начальный момент времени – через  $c_0$ . Объемный расход и концентрацию раствора, подаваемого на вход мембранного аппарата, обозначим соответственно  $Q'$  и  $c'$ . Начальный объем раствора в баке I –  $V_0$ .

Перечисленные объемные расходы и концентрации связаны между собой. Эти связи определяются следующими параметрами, которые полагаются постоянными.

1. Коэффициент пермеации

$$\alpha = \frac{Q_3}{Q'} \quad (1)$$

2. Коэффициент отбора:

$$\beta = \frac{Q_2}{Q_2 + Q_4} \quad (2)$$

3. Коэффициент обогащения [5]

$$K = \frac{c_2}{c_4} \quad (3)$$

4. Интегральный коэффициент отражения

$$\sigma = 1 - \frac{c_3}{c'} \quad (\sigma \leq 1) \quad (4)$$

Параметр, аналогичный  $\sigma$ , используется в моделях переноса через мембраны, построенных с применением методов неравновесной термодинамики [6].

Перечисленные коэффициенты можно выразить следующим образом [5]:

$$\alpha = \frac{J \cdot \pi R L}{U_{cp} \cdot \pi R^2} = \frac{J}{U_{cp}} \frac{L}{R} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{Q_2}{N\pi R^2 U_{cp}} = \left[ 1 - \left( \frac{r^*}{R} \right)^2 \right]^2; \quad (6)$$

$$K_{об} = 1 + \frac{4}{3(1-\Phi)^2} \left( \frac{L}{2R} \cdot \frac{J}{U_{cp}} \right) \quad (7)$$

где  $U_{cp}$  – средняя скорость движения раствора в мембранном канале;  $J$  – так называемая «фильтрационная скорость», т.е. скорость движения пермеата через мембрану. Фильтрационная скорость характеризует также производительность мембраны по пермеату, определяемую объемом пермеата, проходящего через мембрану за единицу времени в расчете на единицу ее поверхности.

Из (5) – (7) видно, что эти коэффициенты можно выразить через следующие параметры мембран:

$$\lambda = \frac{L}{2R}, \quad \omega = \frac{J}{U_{cp}}, \quad \Phi = \left( \frac{r^*}{R} \right)^2 \quad (8)$$

Соответствующие выражения имеют вид:

$$\alpha = 4\lambda\omega, \quad \beta = (1 - \Phi)^2, \\ K = 1 + \frac{4\lambda\omega}{3(1 - \Phi)^2} = 1 + \frac{\alpha}{3\beta} \quad (9)$$

Перейдем к балансовому анализу работы установки.

1. Схема «а» с возвратом ретентата в бак I.

В этом случае, как видно из рис. 1, а,  $Q' = Q_1$ ,  $c' = c_1$ . Изменение объемов растворов в баках описывается балансовыми уравнениями:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_4 - Q_1; \quad (10)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_2; \quad (11)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = Q_3. \quad (12)$$

Кроме того, для МА должно выполняться очевидное балансовое соотношение

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4. \quad (13)$$

Концентрации ВМС в емкостях определяются уравнениями материального баланса ВМС:

$$\frac{d}{dt}(V_1 c_1) = Q_4 c_4 - Q_1 c_1; \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}(V_2 c^*) = Q_2 c_2; \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}(V_3 c_n) = Q_3 c_3, \quad (16)$$

а для мембранного модуля, в свою очередь, справедливо уравнение материального баланса ВМС в виде

$$Q_1 c_1 = Q_2 c_2 + Q_3 c_3 + Q_4 c_4. \quad (17)$$

Введем безразмерные переменные, отнеся все расходы к величине  $Q'$  ( $=Q_1$ ), концентрации – к величине  $c_0$ , а объемы – к  $V_0$ :

$$q_i = \frac{Q_i}{Q_1}, \quad z_i = \frac{c_i}{c_0}, \quad v_j = \frac{V_j}{V_0}, \quad \tau = \frac{Q_1}{V_0} t. \quad (18)$$

Безразмерная переменная  $\tau$  характеризует время протекания процесса. Индекс  $i = 1, 2, 3, 4$  соответствует номеру трубопровода, а  $j = 1, 2, 3$  – номеру бака. В этих переменных уравнения (10) – (17) принимают вид:

$$\frac{dv_1}{d\tau} = q_4 - 1 \quad (19)$$

$$\frac{dv_2}{d\tau} = q_2; \quad (20)$$

$$\frac{dv_3}{d\tau} = q_3; \quad (21)$$

$$q_2 + q_3 + q_4 = 1; \quad (22)$$

$$\frac{d}{d\tau}(v_1 z_1) = q_4 z_4 - z_1; \quad (23)$$

$$\frac{d}{d\tau}(v_2 z^*) = q_2 z_2; \quad (24)$$

$$\frac{d}{d\tau}(v_3 z_n) = q_3 z_3; \quad (25)$$

$$z_1 = q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 \quad (26)$$

с начальными условиями

$$v_1 = 1, \quad v_2 = v_3 = 0, \quad z_1 = 1 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (27)$$

Записанные в переменных (18) определения коэффициентов  $\alpha, \beta$  (1, 2) и уравнение (22) образуют систему уравнений для безразмерных расходов, решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} q_2 &= \beta(1 - \alpha), \\ q_3 &= \alpha, \\ q_4 &= (1 - \alpha)(1 - \beta) \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом (28) уравнения (19) – (21) интегрируются с начальными условиями (27):

$$v_1 = 1 - S\tau, \quad v_2 = \beta(1 - \alpha)\tau, \quad v_3 = \alpha\tau, \quad (29)$$

где введено обозначение

$$S = \alpha + \beta - \alpha\beta. \quad (30)$$

Время  $\tau_{fin}$ , необходимое для полной переработки порции раствора, определяется условием  $v_1 = 0$ . Из (29) следует

$$\tau_{fin} = \frac{1}{S}. \quad (31)$$

Конечные объемы концентрата и пермеата определяются из (29), (31):

$$v_2 \tau_{fin} = \frac{\beta(1 - \alpha)}{S}, \quad v_3 \tau_{fin} = \frac{\alpha}{S}. \quad (32)$$

Аналогичным образом из определений коэффициентов  $K, \sigma$  и уравнения (26) с учетом (28) можно получить выражения безразмерных концентраций.

$$\begin{aligned} z_2 &= KRz_1, \\ z_3 &= (1 - \sigma)z_1, \\ z_4 &= Rz_1, \end{aligned} \quad (33)$$

где введено обозначение

$$R = \frac{1 - \alpha + \alpha\sigma}{(1 + K\beta - \beta)(1 - \alpha)}. \quad (34)$$

С учетом (28), (33) можно проинтегрировать уравнения для концентраций в баках (23) – (25). Решения имеют вид

$$z_1 = \left( \frac{1}{1 - S\tau} \right)^{\frac{U+S}{S}} \quad (35)$$

$$z^* = \frac{KR}{U\tau} \left[ (1 - S\tau)^{-U/S} - 1 \right] \quad (36)$$

$$z_n = \frac{(1 - \sigma)}{U\tau} \left[ (1 - S\tau)^{-U/S} - 1 \right] \quad (37)$$

где введено еще одно обозначение

$$U = (1 - \alpha)(1 - \beta)R - 1 \quad (U < 0). \quad (38)$$

Из (36), (37) можно также определить общую массу ВМС, накопленного в составе концентрата, и потерянного с пермеатом.

$$\mu_{fin}^* = \frac{V_2 c_{fin}^*}{V_0 c_0} = (v_2 z^*) \Big|_{\tau=\tau_{fin}} = -\frac{KR\beta(1 - \alpha)}{U}; \quad (39)$$

$$\mu_{nep\,fin} = \frac{V_3 c_n \tau_{fin}}{V_0 c_0} = (v_3 z_n) \Big|_{\tau=\tau_{fin}} = -\frac{\alpha(1 - \sigma)}{U} \quad (40)$$

2. Схема «б» с возвратом ретентата на вход МА. В этом случае, как следует из рис. 1, б:

$$Q' = Q_1 + Q_4, \quad c_1 = c_0 \quad (41)$$

Уравнение баланса объемов растворов для МА принимает в этом случае вид

$$Q' = Q_2 + Q_3 + Q_4 \quad (42)$$

или с учетом (41)

$$Q_1 = Q_2 + Q_3. \quad (43)$$

Уравнения баланса массы ВМС можно записать отдельно для точки смешения А (см. рис. 1, б) и для МА:

$$Q_1 c_0 + Q_4 c_4 = (Q_1 + Q_4) c'; \quad (44)$$

$$(Q_1 + Q_4) c' = Q_2 c_2 + Q_3 c_3 + Q_4 c_4, \quad (45)$$

откуда с учетом (44) получается:

$$Q_1 c_0 = Q_2 c_2 + Q_3 c_3. \quad (46)$$

Изменяются также уравнения баланса объема раствора и массы ВМС для бака I. Вместо (10), (14) имеем теперь

$$\frac{dV_1}{dt} = -Q_1 \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt}(V_1 c_1) = -Q_1 c_1. \quad (48)$$

Легко видеть, что эти два уравнения тождественны, так как из (41) следует, что концентрация  $c_1$  постоянна. Уравнения балансов для баков II, III: (11) – (12) и (15) – (16) – сохраняют прежний вид.

Определения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$  и  $\sigma$  (1) – (4) остаются в силе. Тогда из (1), (2), (41), (43) получается:

$$\begin{aligned} Q_1 &= SQ', & Q_2 &= (1 - \alpha)\beta Q', \\ Q_3 &= \alpha Q', & Q_4 &= (1 - \alpha)(1 - \beta)Q', \end{aligned} \quad (49)$$

где величина  $S$  определяется формулой (30).

Для концентраций из (3), (4), (41), (44), (46) получаются соотношения:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0, & c_2 &= KWc_0, & c_3 &= (1 - \sigma)SYc_0, \\ c_4 &= Wc_0, & c' &= SYc_0 \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} W &= \frac{S[1 - \alpha(1 - \sigma)]}{(1 - \alpha)[K\beta + \alpha(1 - \sigma)(1 - \beta)]}, \\ Y &= \frac{1 + \beta(K - 1)}{K\beta + \alpha(1 - \sigma)(1 - \beta)} \end{aligned} \quad (51)$$

Можно видеть, что все концентрации получились постоянными, так что в данном случае режим работы установки будет стационарным.

Безразмерные переменные введем аналогично (18), но нормирующий масштаб для расходов ( $Q'$ ) теперь получает иной вид:

$$q_i = \frac{Q_i}{Q_1 + Q_4}, \quad z_i = \frac{c_i}{c_0}, \quad v_j = \frac{V_j}{V_0}, \quad \tau = \frac{Q_1 + Q_4}{V_0} t. \quad (52)$$

Уравнение (47) примет вид

$$\frac{dv_1}{d\tau} = -S \quad (53)$$

с начальным условием  $v_1 = 1$  при  $\tau = 0$ . Уравнения (11), (12) для баков II и III в переменных (52) примут вид (20), (21), причем в переменных (52) соотношения между безразмерными расходами имеют тот же вид (28), что и для схемы «а». В результате решения балансовых уравнений совпадают с (29). Безразмерное время переработки порции исходного раствора также определяется в этом случае формулой (31), а конечные объемы концентрата и пермеата – формулами (32).

Поскольку в данном случае концентрации поступающих в баки II и III растворов оказываются постоянными, то выражения (50) для  $c_2$  и  $c_3$  определяют и концентрации получающихся концентрата и пермеата. Массы ВМС, накопленного в концентрате и потерянного с пермеатом, определяются в безразмерном виде выражениями, полученными на основе (32), (50):

$$\mu_{fin}^* = \frac{V_2 c_2}{V_0 c_0} = v_2 \cdot fin \cdot z_2 = \frac{KW\beta(1 - \alpha)}{S} \quad (54)$$

$$\mu_{nep \cdot fin} = \frac{V_3 c_3}{V_0 c_0} = v_3 \cdot fin \cdot z_3 = \alpha Y(1 - \sigma) \quad (55)$$

### Результаты и их обсуждение

Совпадение решений балансовых уравнений в безразмерной форме для обеих рассмотренных схем работы установки говорит о том, что при одинаковом гидравлическом режиме работы МА, определяемом величиной подачи раствора на его вход  $Q'$ , время переработки одинаковых порций исходного раствора и объемы получающихся концентрата и пермеата оказываются одинаковыми. Расчет масс накопленного и потерянного ВМС по формулам (39), (40) для схемы «а» и (54), (55) для схемы «б» показывает, что эти массы также совпадают для обеих схем. Таким образом, можно сделать вывод о том, что с точки зрения получения конечного продукта обе схемы работы установки оказываются равноценными.

Однако условия работы МА в ходе процесса концентрирования для рассмотренных схем существенно отличаются. На рис. 2 показаны результаты расчета изменения текущих концентраций в баке II для обеих схем. Для схемы «а» с возвратом ретента в бак I показано также изменение концентрации раствора в этом баке, а для схемы «б» – величина концентрации на входе МА.

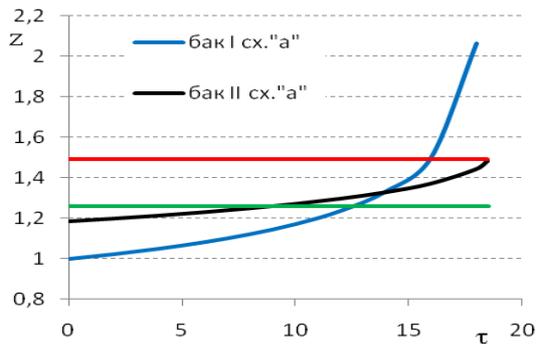


Рис. 2. Изменение концентраций получаемых растворов

Параметры расчета приняты следующими. Начальный объем раствора в баке I – 150 л. Мембранный аппарат включает 200 параллельных трубчатых мембран длиной по 800 мм и диаметром 4 мм. Средняя скорость движения раствора в мембране была принята равной 0,12 м/с, производительность мембраны – 5 л/(м<sup>2</sup>ч), что соответствует фильтрационной скорости  $2,8 \cdot 10^{-6}$  м/с. Ширина кольцевой зоны сечения мембраны, из которой производился отвод концентрата, взята равной 10 % от радиуса трубки ( $r^* = 0,9R$ ). В этом случае, согласно (8), (9), характерные параметры (1) – (3) имеют значения  $\alpha = 0,0185$ ,  $\beta = 0,0361$ ,  $K = 1,171$ . Коэффициент отражения  $\sigma$  принят равным 0,95.

При этих параметрах объемный расход на входе аппарата  $Q'$  составляет  $3,016 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с. По результатам расчета безразмерное время переработки порции раствора  $\tau_{fin} = 18,54$ . С учетом определений безразмерных переменных это соответствует

$$t = \frac{V_0}{Q'} \tau_{fin} = \frac{0,15}{3,016 \cdot 10^{-4}} \cdot 18,54 = 9220 \text{ с} = 2,56 \text{ часа}$$

Как видно из рис. 2, концентрация раствора в баке II (концентрата) при работе установки по схеме «а» постепенно возрастает и к концу переработки действительно сравнивается с концентрацией, полу-

чаемой по схеме «б». В то же время из рис. 2 видно, что при работе установки по схеме «б» на входе МА уже с начального момента поддерживается довольно высокая концентрация поступающего раствора. Это увеличивает опасность достижения концентрации гелеобразования на поверхностях мембран и загрязнения их поверхности, что может вызвать существенное уменьшение производительности аппарата. При работе по схеме «а» входная концентрация раствора, совпадающая в этом случае с концентрацией в баке I, длительное время (около 2/3 от общей продолжительности обработки порции) поддерживается на более низком уровне и опасность загрязнения не столь велика.

Для уменьшения опасности загрязнения мембран можно предложить смешанную схему работы установки. На начальном этапе ретентат с выхода МА следует возвращать обратно в бак I. Этот режим необходимо поддерживать до того момента, когда концентрация в баке I достигнет значения, равного входной концентрации, соответствующей схеме «б». После этого следует перевести установку в режим «б» с возвратом ретентата непосредственно на вход МА (конструкция установки, описанная в [3], позволяет легко это сделать).

Если же опасность возникновения геля невелика и работа установки будет продолжена по схеме «а», то из рис. 2 можно видеть, что концентрация остатка раствора в баке I продолжает повышаться и в конце обработки становится заметно выше, чем концентрация получаемого в баке II концентрата. Таким образом, использование схемы с возвратом ретентата в исходный бак позволяет на завершающем этапе переработки получить небольшую порцию более концентрированного раствора, нежели в случае более распространенной схемы с возвратом ретентата на вход МА.

Описанные модели позволяют также проводить расчеты других смешанных схем и режимов работы установки с целью установления оптимальных по различным критериям схем и режимных параметров.

#### Список литературы

1. Лобасенко, Б.А. Аппарат для мембранного разделения жидких пищевых продуктов / Б.А. Лобасенко, А.А. Сафонов // Хранение и переработка сельскохозяйственного сырья. – 2003. – № 6. – С. 67–69.
2. Лобасенко, Б.А. Аппарат для мембранного концентрирования молока и молочных продуктов с применением промежуточной регенерации мембраны / Б.А. Лобасенко, Д.М. Силков // Хранение и переработка сельскохозяйственного сырья. – 2005. – № 7. – С. 25–27.
3. Лобасенко, Б.А. Ультрафильтрация молока и молочных продуктов / Б.А. Лобасенко, Р.Б. Лобасенко; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2006. – 117 с.
4. Семенов, А.Г. Математическая модель порционной установки для ультрафильтрационной сепарации молока / А.Г. Семенов, Н.А. Благодечская, А.А. Сафонов // Технология и техника пищевых производств / Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2003. – С. 168–171.
5. Лобасенко, Б.А. Оценка параметров процесса ультрафильтрации с отдельным отводом обработанного раствора / Б.А. Лобасенко, А.Г. Семенов, Н.А. Благодечская // Техника и технология пищевых производств / Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2005. – С. 108–111.
6. Kargol, A. A Mechanistic model of transport processes in porous membranes generated by osmotic and hydrostatic pressure / A. Kargol // Journal of Membrane Science. – 2001. – V. 191. – P. 61–69.

ГОУ ВПО «Кемеровский технологический институт  
пищевой промышленности»,  
650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47.  
Тел./факс: (3842) 73-40-40  
e-mail: office@kemtipp.ru

**SUMMARY**

**A.G. Semionov, A.E. Timofeev**

**Modeling and calculation of batch operation ultrafiltration plants**

Mathematical models of batch operation ultrafiltration plants with retentate recirculation and separate venting of the solution from the membrane module outlet are considered. Two variants of process realization with retentate return to the tank with initial solution, or its return to the apparatus inlet are analyzed. It has been shown, that both schemes enable to obtain the final product of the same concentration, but the scheme with retentate return to the module inlet runs more risk of membrane pollution.

Mathematical model, ultrafiltration plant, recirculation, balance analysis.

Kemerovo Institute of Food Science and Technology  
47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia  
Phone/Fax: +7(3842) 73-40-40  
e-mail: office@kemtipp.ru

